

Вопросы к экзамену по дисциплине Математика

Для студентов 1 курса

1. Степенная функция. Ее график (n – четное положительное число), свойства.
2. Степенная функция. Ее график (n – нечетное положительное число), свойства.
3. Степенная функция. Ее график (n – четное отрицательное число), свойства.
4. Степенная функция. Ее график (n – нечетное отрицательное число), свойства.
5. Иррациональные уравнения. Приемы решения. Примеры.
6. Показательная функция. Ее свойства, общий вид графика показательной функции ($a > 1$).
7. Показательная функция. Ее свойства, общий вид графика показательной функции ($0 < a < 1$).
8. Показательные уравнения. Приемы решения. Примеры.
9. Показательные неравенства. Приемы решения. Примеры.
10. Логарифм. Определение. Свойства.
11. Логарифмическая функция. Ее свойства, график ($a > 1$).
12. Логарифмическая функция. Ее свойства, график ($0 < a < 1$).
13. Логарифмические уравнения. Приемы решения. Примеры.
14. Логарифмические неравенства. Приемы решения. Примеры.
15. Обратная функция. Примеры. Графическая иллюстрация.
16. Тригонометрические функции. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
17. Радианная мера угла. Переход от градусной меры к радианной и наоборот.
18. Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
19. Зависимость между тригонометрическими функциями одного угла.
20. Синус, косинус, тангенс, котангенс углов α и $-\alpha$.
21. Формулы двойного угла. Примеры.
22. Формулы сложения. Примеры.
23. Правило приведения. Примеры.
24. Уравнение $\cos x = a$. Общий случай. Примеры.
25. Уравнение $\cos x = a$. Частные случаи.
26. Уравнение $\sin x = a$. Общий случай. Примеры.
27. Уравнение $\sin x = a$. Частные случаи.

28. Уравнение $\operatorname{tg} x = \alpha$. Примеры.
29. Уравнение $\operatorname{ctg} x = \alpha$. Примеры.
30. Понятие $\arccos \alpha$. Arccos отрицательного значения.
31. Понятие $\arcsin \alpha$. Arcsin отрицательного значения.
32. Понятие $\operatorname{arctg} \alpha$. Arctg отрицательного значения.
33. Понятие $\operatorname{arcctg} \alpha$. Arcctg отрицательного значения.
34. Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным. Пример.
35. Решение однородных тригонометрических уравнений. Пример.
36. Решение тригонометрических уравнений, решаемых разложением левой части на множители. Пример.
37. Решение простейших тригонометрических неравенств. Примеры.
38. Тригонометрические функции. Область определения и множество значений тригонометрических функций.
39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций.
40. Функция $y = \cos x$, ее свойства.
41. Функция $y = \cos x$, ее график.
42. Функция $y = \sin x$, ее свойства.
43. Функция $y = \sin x$, ее график.
44. Функция $y = \operatorname{tg} x$, ее свойства.
45. Функция $y = \operatorname{tg} x$, ее график.
46. Функция $y = \operatorname{ctg} x$, ее свойства.
47. Функция $y = \operatorname{ctg} x$, ее график.
48. Производная функции, определение. Примеры.
49. Правила дифференцирования.
50. Геометрический смысл производной.
51. Уравнение касательной к графику функции
52. Физический смысл первой производной.
53. Возрастание и убывание функции.
54. Исследование на убывание и возрастание функции
55. Точки экстремума и экстремумы функции.
56. Исследование на точки экстремума и экстремум функции.
57. Площадь криволинейной трапеции.
58. Нахождение площадей фигур с помощью определенного интеграла
59. Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии.
60. Следствия из аксиом стереометрии.

61. Параллельные прямые в пространстве. Теорема о параллельных прямых.
62. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости
63. Расположение прямых в пространстве.
64. Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых
65. Угол между прямыми.
66. Параллельные плоскости. Признак параллельности двух плоскостей
67. Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей
68. Параллелепипед. Элементы параллелепипеда. Свойства параллелепипеда
69. Перпендикулярные прямые в пространстве. Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой
70. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости
71. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, прямой и параллельной ей плоскостью, между скрещивающимися прямыми
72. Угол между прямой и плоскостью
73. Перпендикулярные плоскости. Признак параллельности двух плоскостей.
74. Признак параллельности двух плоскостей. Следствие.
75. Прямоугольный параллелепипед. Свойства прямоугольного параллелепипеда.
76. Объем прямоугольного параллелепипеда.
77. Призма. Прямая и правильная призма.
78. Площадь боковой и полной поверхности призмы.
79. Объем призмы
80. Пирамида. Правильная пирамида.
81. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды.
82. Объем пирамиды
83. Цилиндр. Основные сечения цилиндра.
84. Площадь поверхности и объем цилиндра
85. Конус. Сечения конуса.
86. Площадь боковой и полной поверхности и объем конуса
87. Сфера, шар. Уравнение сферы.
88. Объем шара, площадь сферы
89. Сфера. Взаимное расположение сферы и плоскости
90. Вектор. Длина вектора. Коллинеарные векторы, равные векторы

91. Действия над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на число) и их свойства
92. Компланарные векторы. Признак компланарности векторов. Разложение вектора по трем некопланарным векторам
93. Координаты вектора. Координаты вектора суммы, разности, произведения вектора на число
94. Связь между координатами векторов и координатами точек
95. Координаты середины отрезка. Вычисление длины вектора по координатам. Формула для вычисления расстояния между двумя точками.
96. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Формула для нахождения угла между векторами

Типовые практические задания

1. Решите показательное уравнение:

a. $\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{64}\right)^2$

b. $3 \cdot 7^{x+1} + 5 \cdot 7^{x-1} = 152$

c. $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$

d. $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

e. $2^x + 2^{x+3} = 9$

f. $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}$

g. $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$

2. Решите показательное неравенство:

a. $\left(\frac{1}{9}\right)^{5-3x} \leq 27$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-4}$

c. $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}$

d. $10^{3x+1} > 0,001$

3. Решите иррациональное уравнение:

a. $\sqrt{5x^2 + 3x - 1} - 2x = 1$

b. $\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x} = 4$

c. $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$

d. $\sqrt{-x^2 + 3x + 2} = 4 - x$

e. $\sqrt{2x+7} = x + 2$

f. $\sqrt{7 - \sqrt{x+1}} = 2$

4. Упростите выражение:

a. $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$

b. $\frac{\sin(360^\circ - \alpha) \cos(-\alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)}$

- c. $\frac{2\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$
- d. $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- e. $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$
- f. $5 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

5. Вычислите:

- a. $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$
- b. $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$
- c. $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$
- d. $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2} \log_4 \frac{25}{81}$
- e. $\operatorname{tg} 300^\circ$

6. Решите тригонометрическое уравнение:

- a. $2 \cos (x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
- b. $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$
- c. $\sin^2 x - 0,25 = 0$
- d. $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$
- e. $\sin x + \cos x = 0$
- f. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
- g. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$
- h. $2 \sin (\frac{\pi}{3} - x) = 1$
- i. $4 \sin 2x = 3$
- j. $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$
- k. $\sin x = \sqrt{3} \cos x$
- l. $2 \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
- m. $2 \sin (x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
- n. $\cos 2x - \cos x \sin x = 0$
- o. $4 \cos 2x - 3 = 0$
- p. $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$
- q. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$
- r. $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$
- s. $2 \sin (x + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} = 0$
- t. $\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x \sin x = 0$
- u. $2 \sin^2 x - 1 = 0$
- v. $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$
- w. $\sin x = \cos x$
- x. $2 \sin 2x - 3 \sin x + 1 = 0$

7. Решите задачу:

- a. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и α - угол II координатной четверти
- b. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,6$ и α - угол I координатной четверти

- c. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -0,8$ и α - угол III координатной четверти
d. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и α - угол I координатной четверти

8. Решите логарифмическое уравнение:

- a. $\log_3 (2x - 1) = 2$
b. $\log_5 (x + 1) = \log_5 (4x - 5)$
c. $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x - 3)$
d. $\log_2 (x + 3) = 4$
e. $\log_2 (4 - x) + \log_2 (1 - 2x) = 2 \log_2 3$
f. $\lg (3 - x) - \lg (x + 2) = 2 \lg 2$

9. Решите логарифмическое неравенство:

- a. $\log_2 (x - 3) \leq \log_2 8$
b. $2 \log_2 (3 - 2x) < 0$
c. $-4 \log_2 (6x + 1) < 0$

10. Сравните: $\lg 0,7 * \lg \frac{8}{11}$

11. Решите графически уравнение:

- a. $\log_3 x = 4 - x$
b. $\log_2 x = 3 - x$
c. $\log_3 x = 5 - 2x$
d. $\log_2 x = 6 - 2x$

Решите задачу:

- 1) Основанием прямой призмы является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота равна 10 см. Найдите большую диагональ призмы.
- 2) Основанием прямой призмы является прямоугольник со сторонами 5 см и 12 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите боковое ребро призмы.
- 3) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда имеют длины 8 см и 6 см, а длина диагонали параллелепипеда 26 см. Найдите высоту.
- 4) Стороны основания прямого параллелепипеда $\sqrt{18}$ см и 7 см, угол между ними равен 135° , боковое ребро 12 см. Найдите меньшую диагональ параллелепипеда.
- 5) Диагональ куба равна 20 см. Найдите его объем
- 6) Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найдите его объем, если диагональ его боковой грани, равная 8 см, образует с плоскостью основания угол 30° .
- 7) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 25 см, а диагональ ее боковой грани равна 20 см. Найдите сторону основания.
- 8) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 7 см, высота 10 см. Найдите диагонали параллелепипеда.
- 9) Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 16 и 12 см, диагональ боковой грани равна 26 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
- 10) Стороны основания прямого параллелепипеда $\sqrt{18}$ см и 7 см, угол между ними равен 135° , боковое ребро равно 12 см. Найдите меньшую диагональ параллелепипеда.

- 11) В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со сторонами 6 см и острым углом 60° . Найдите меньшую диагональ параллелепипеда, если она составляет с плоскостью основания угол 45° .
- 12) Диагональ куба равна 10 см. Найдите объем куба.
- 13) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если длины диагоналей его граней равны 7, 8 и 9 см.
- 14) Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{2}$ дм, боковое ребро равно стороне основания. Вычислите объем призмы.
- 15) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 8 см, сторона основания 2 см. Найдите высоту пирамиды.
- 16) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 2 см, а двугранный угол при основании 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 17) Ромб со стороной 10 см является основанием пирамиды, острый угол ромба равен 60° . Боковое ребро, образующее угол с большей диагональю ромба равно 15 см. Найдите объем пирамиды.
- 18) Точка А находится на расстоянии 3 см от плоскости равностороннего треугольника ABC и 5 см от вершин этого треугольника. Найдите длину стороны треугольника ABC.
- 19) Дана правильная шестиугольная пирамида. Двугранный угол при стороне основания равен 60° , сторона основания равна 10 см. Найдите высоту, апофему пирамиды.
- 20) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 2 см. Определите боковое ребро.

Решите задачу:

- 21) В цилиндре радиусом 5 см проведено параллельно оси сечение, отстоящее от нее на расстояние 3 см. Найдите высоту, если площадь сечения 64 см^2 .
- 22) Из квадрата, диагональ которого равна d , свернута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.
- 23) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 см, высота цилиндра 24 см. Найдите площадь основания цилиндра.
- 24) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите высоту цилиндра.

Решите задачу:

- 25) Образующая усеченного конуса равна 4 см, диаметры оснований 8 и 10 см, определите высоту.
- 26) Найдите площадь поверхности конуса, если высота равна 4 см, а величина угла при вершине осевого сечения равна 90° .
- 27) Высота усеченного конуса равна 2 см, диаметры оснований 4 и 6 см. Найдите образующую усеченного конуса.
- 28) Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник со стороной 6 см. Найдите объем.

Решите задачу:

- 29) Радиус шара равен 14 см. Через середину радиуса, перпендикулярно ему, проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
- 30) Объем шара равен $36\pi \text{ см}^3$. Найдите площадь поверхности шара.
- 31) Площадь поверхности шара равна 324 см^2 . Найдите его диаметр.

Решите задачу:

- 32) Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} \{1; -2; 0\}$,
 $\vec{b} \{0; 3; -6\}$, $\vec{c} \{-2; 3; 1\}$.
- 33) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $AC_1 + B_1 D = 2 BC$
- 34) Отрезок EF соединяет середины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что $2 FE = BA + DC$. Компланарны ли векторы FE , BA и DC ?
- 35) Диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . Разложите векторы CD и $D_1 O$ по векторам AA_1 , AB и AD .
- 36) Даны векторы $a = 2i - 3j + k$ и $b = 4i - 2k$. Вычислите $a \cdot b$.
- 37) Вычислите угол между векторами $a \{2; -2; 0\}$ и $b \{3; 0; -3\}$.
- 38) Проверьте коллинеарность векторов $\vec{a} (3; -1; 2)$ и $\vec{b} (-9; 3; -6)$. Установите, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены: одинаково или противоположно.
- 39) Даны координаты четырех вершин куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $A (0; 0; 0)$, $B (0; 0; 1)$, $D (0; 1; 0)$, $A_1 (1; 0; 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.
- 40) Определите вид треугольника ABC , если его вершины имеют координаты $A (2; 1; 2)$, $B (2; 3; -1)$, $C (2; -1; -1)$. Вычислите его площадь
- 41) Даны точки $A (4; 4; 0)$, $B (0; 0; 0)$, $C (0; 3; 4)$, $D (1; 4; 4)$. Докажите, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция.
- 42) Даны три вершины $A (1; 4; 2)$, $B (2; -1; 5)$, $C (0; -2; 4)$ прямоугольника $ABCD$. Найдите координаты четвертой вершины.
- 43) Докажите, что треугольник с вершинами $A (7; 1; -5)$, $B (4; -3; -4)$, $C (1; 3; -2)$ равнобедренный.

Выполните задание:

- 44) Исследуйте функцию $y = f(x)$ на возрастание, убывание и экстремумы: $f(x) = x^4 - 10x^2 - 5$.
- 45) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2x - 3$.
- 46) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$ в точке $x_0 = 2$.
- 47) Решите неравенство $f'(x) < 0$, если $f(x) = x - 2x^2$.
- 48) Найдите критические точки функции $y = -x^4 - 8x^2 + 5$
- 49) Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{2x}$ в точке $x_0 = 0$.
- 50) Найдите промежутки возрастания функции $y = x^2 - 2x + 3$.
- 51) Исследуйте функцию $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ на возрастание (убывание) и экстремумы.
- 52) Исследуйте функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3$ на возрастание (убывание).
- 53) Найдите производную функции $y = x^5 - x(x^3 + 7)$.
- 54) Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x^3 + 5x$ в точке $(1; 8)$.
- 55) Найдите производную функции $f(x) = (3x^2 - 2)^{119}$.

Выполните задание:

- 56) Вычислите интеграл $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$

57) Вычислите интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

58) Вычислите интеграл $\int_1^9 \frac{6x}{\sqrt{x}} dx$

59) Вычислите интеграл $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$

60) Вычислите интеграл $\int_0^1 (1+2x)^4 dx$

61) Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке $(0; \infty)$: $F(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^3} - 2$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$

62) Найдите общий вид первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x} - \sin 3x$

63) Найдите первообразную функции: $f(x) = \frac{2}{\sin^2(x+1)} + 3 \cos(3-4x) + 1$

64) Найти первообразную функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, график которой проходит через точку M(2;4).

65) Найдите первообразную функции $x\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$

66) Для функции $f(x) = (2x+5)^6$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M(-2;3).

67) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$, $y = x^2 - 2x$.

68) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$,
 $y = 2x - 2$

69) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2$ и $y = 5$

70) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$ и $y = 3$.

71) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 3x - x^2$, $y = 0$.

72) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 0$,

$x = -1$, $x = -2$.

Преподаватель

Подпись

А.А. Петров

И.О. Фамилия.